TREBALL DE FI DE GRAU

Grau en Matemàtiques

Títol: Grups de matrius

Autor: Pau Pijuan Casanova

Director: Pere Pascual Gainza

Departament: Departament de matemàtica aplicada I

Convocatòria: 2013/2014

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Universitat Politècnica de Catalunya
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Projecte fi de carrera

Grups de matrius

Pau Pijuan Casanova

Director: Pere Pascual Gainza

Departament de Matemàtica Aplicada I

Voldria donar les gràcies a la meva família, amics i matemàtics que m'han donat suport fins l'últim moment.

Resum

Paraules clau: Grups de Lie, grups de matrius, espais homogenis

MSC2000: 22E30, 22F30

En aquest treball estudiarem els grups de matrius clàssics com per exemple el grup lineal, el grup ortogonal, el grup unitari o el grup simplèctic, amb la finalitat d'estudiar els grups de Lie. Els grups de matrius són un exemple de grups de Lie, així els resultats obtinguts per als grups de matrius seran vàlids per a la teoria de grups de Lie.

En el primer capítol caracteritzarem els grups de matrius segons la seva topologia, compacitat i connexió i a més definirem la noció de grup de Lie.

En el segon definirem el què són les àlgebres de Lie i a més estudiarem algunes propietats. Donarem alguns resultats sobre les funcions exponencials i logaritme de matrius i també introduirem els subgrups uniparamètrics.

Al tercer capítol analitzarem els espais homogenis associats als grups de matrius, identificant alguns coneguts com l'espai projectiu o les grassmanianes. A més donarem un resultat general de la connexió dels grups de matrius, el qual compararem amb el deduit en el primer capítol.

Finalment estudiarem els tors maximals i d'aquesta manera podrem classificar els grups de martius a partir dels tors maximals.

Índex general

Capítol 1
Grups de matrius

En aquest treball introduirem els grups de Lie a partir dels grups matricials i en caracteritzarem la seva estructura.

1. El grup lineal i els seus subgrups

Al llarg de tot el treball utilitzarem sobretot els cossos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, però també veurem un grup dels quaternions ($Sp_n(\mathbb{H})$).

Anomenarem $M_{m,n}(\mathbb{K})$ al conjunt de matrius $m \times n$ i les matrius quadrades les denotarem per $M_{n,n}(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$. A continuació es presenten els grups matricials.

Definició 1.1. *$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : det\ A \neq 0\}$ s'anomena grup lineal i és el conjunt de matrius $n \times n$ invertibles.*

Proposició 1.2. *El conjunt $GL_n(\mathbb{K})$ és un grup sota l'operació de producte de matrius.*

Demostració. Per demostrar que és grup, hem de veure que el producte és associatiu, té invers i a més existeix neutre.

Sabem que si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, aleshores el $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. Per tant el determinant sempre serà diferent de 0 i el producte és una operació interna del conjunt $GL_n(\mathbb{K})$.

El producte de matrius en $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sempre és associatiu.

Existeix l'invers ja que les matrius tenen determinant diferent de 0.

El neutre és la matriu identitat que pertany al conjunt ja que té determinant 1, que denotarem per Id. □

A part del grup lineal, estem interessats en els seus subgrups que presentem a continuació.

Definició 1.3. *$SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : det\ A = 1\} \subseteq GL_n(\mathbb{K})$ s'anomena el grup especial.*

PROPOSICIÓ 1.4. *El conjunt $SL_n(\mathbb{K})$ és subgrup de $GL_n(\mathbb{K})$.*

DEMOSTRACIÓ. És obvi que la Id pertany a $SL_n(\mathbb{K})$. Només hem de veure que si $A, B \in SL_n(\mathbb{K})$ llavors $AB^{-1} \in SL_n(\mathbb{K})$. Sabem que l'invers existeix perquè el determinant d'un element de $SL_n(\mathbb{K})$ té determinant 1 i a més aquest també tindrà determinant 1, ja que $1 = \det(Id) = \det(BB^{-1}) = \det(B)\det(B^{-1}) = 1 \cdot \det(B^{-1})$. Amb el mateix raonament veiem que $AB^{-1} \in SL_n(\mathbb{K})$ ja que els dos elements tenen determinant 1. □

DEFINICIÓ 1.5. *El grup ortognal és $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : A^t A = Id\}$.*

Observem que les matrius del grup ortogonal són isometries ja que $det\ A = \pm 1$.

DEFINICIÓ 1.6. *$SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) : det\ A = 1\} \subset O_n(\mathbb{R})$ es diu grup ortogonal especial.*

Aquestes matrius són les rotacions directes. En el cas complex, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, definirem:

DEFINICIÓ 1.7. *El grup unitari: $U_n(\mathbb{C}) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) : A^* A = Id\}$ on $A^* = (\overline{A})^t = \overline{(A^t)}$ és la conjugada hermítica.*

DEFINICIÓ 1.8. *$SU_n(\mathbb{C}) = \{A \in U_n(\mathbb{C}) : det\ A = 1\} \subset U_n(\mathbb{C})$ s'anomena grup especial unitari.*

OBSERVACIÓ. Observem que

$$GL_n(\mathbb{R}) = GL_n^+(\mathbb{R}) \cup GL_n^-(\mathbb{R})$$

on $GL_n^+(\mathbb{R}) = A \in GL_n(\mathbb{R}) : det\ A \in (0, +\infty)$ i $GL_n^-(\mathbb{R}) = A \in GL_n(\mathbb{R}) : det\ A \in (-\infty, 0)$.

També tenim les igualtats següents

$$O_n(\mathbb{R}) = \{\pm 1\} \times SO_n(\mathbb{R}) = O_1(\mathbb{R}) \times SO_n(\mathbb{R})$$
$$U_n(\mathbb{C}) = U_1(\mathbb{C}) \times SU_n(\mathbb{C})$$

Un altre exemple de subgrup de $GL_n(\mathbb{K})$ són les matrius triangulars superiors. Per a $n \geq 1$, una matriu $n \times n$ A $= [a_{ij}]$ és *triangular superior* si és de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \ddots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1n-1} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

També es pot expressar com $a_{ij} = 0$ si $i < j$. Una matriu és *unipotent* si $(A - Id)^n = 0$, en el cas de les matrius triangular superiors tots els elements de la diagonal són 1, és a dir, $a_{ij} = 0$ si $i < j$ i $a_{ii} = 1$.

DEFINICIÓ 1.9. *$UT_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) : A$ és triangular superior$\}$*

DEFINICIÓ 1.10. *$SUT_n(\mathbb{K}) = \{A \in UT_n(\mathbb{K}) : A$ és unipotent$\}$*

2. Topologia

Sabem que $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{K}^{n^2}$, per tant $GL_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{n^2}$, i d'aquesta manera obtenim la topologia usual en els grups esmentats anteriorment. A més, les funcions determinant i traça $det, tr : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ són contínues ja que són polinomis en les funcions coordenades.

Proposició 2.1. *$GL_n(\mathbb{K})$ és un obert de $M_n(\mathbb{K})$.*

Demostració. Sigui l'aplicació determinant, aleshores $GL_n(\mathbb{K}) = det^{-1}(\mathbb{K} \setminus 0)$. Com hem dit anteriorment la funció det és contínua, i a més $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ és un obert, per tant, $GL_n(\mathbb{K})$ és un obert. □

Proposició 2.2. *$SL_n(\mathbb{R})$ és tancat.*

Demostració. Amb el mateix raonament obtenim que $SL_n(\mathbb{R})$ és un tancat, ja que $SL_n(\mathbb{R}) = det^{-1}(1)$. □

Proposició 2.3. *$O_n(\mathbb{R})$ és tancat.*

Demostració. Sigui f la següent aplicació

$$\begin{array}{rcl} f : GL_n(\mathbb{K}) & \to & M_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & f(A) = A^t A \end{array}$$

Aquesta f és contínua i a més $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(Id)$, per tant és tancat. □

Proposició 2.4. *$SO_n(\mathbb{R})$ és tancat.*

Demostració. $SO_n(\mathbb{R})$ és la intersecció de dos tancats, $SL_n(\mathbb{R})$ i $O_n(\mathbb{R})$, per tant també és tancat □

OBSERVACIÓ. $M_n(\mathbb{C}) \subseteq M_{2n}(\mathbb{R})$

Proposició 2.5. *$SL_n(\mathbb{C})$, $U_n(\mathbb{C})$ i $SU_n(\mathbb{C})$ són tancats.*

Demostració. Es demostra seguint el mateix raonament que en el cas real, però canviant la funció $f(A) = A^t A$ per $\overline{f} = A^* A$ □

Ara que hem vist la topologia dels grups anteriors donarem la definició de grup matricial.

Definició 2.6. *Un subgrup $G \leq GL_n(\mathbb{K})$, el qual és un subespai tancat s'anomena un grup de matrius sobre $\mathbb{K}$ o un $\mathbb{K}$-grup de matrius.*

Proposició 2.7. *Un subgrup de matrius $H \leq G$ de un grup de matrius G és un grup de matrius.*

EXEMPLE. Els conjunts $SL_n(\mathbb{K}), O_n(\mathbb{R}), SO_n(\mathbb{R}), U_n(\mathbb{C}),$ i $SU_n(\mathbb{C})$ són grups matricials.

3. Compacitat

Com $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ i aquest és un espai mètric podem aplicar el teorema de Heine-Borel, tot conjunt tancat i fitat és compacte.

Per ser compacte es necessita la propietat de ser tancat, ja veiem que $GL_n(\mathbb{K})$ no és compacte. Ara veurem que els altres si que ho són.

Proposició 3.1. *$O_n(\mathbb{R})$ és compacte.*

Demostració. Anteriorment hem vist que és tancat. Per tant, ara només falta veure que és fitat.

El fet que $A^tA = Id$ implica que cada columna és un vector de norma 1 i a més, els vectors han de ser ortogonals entre ells. Aleshores és fitat i per tant, compacte. $\square$

Proposició 3.2. *$SO_n(\mathbb{R})$ és compacte.*

Demostració. Com $SO_n(\mathbb{R}) \subset O_n(\mathbb{R})$, aleshores $SO_n(\mathbb{R})$ també és fitat i per tant compacte. $\square$

A continuació proposem el mateix resultat utilitzant matrius hermítiques en lloc de transposades

Proposició 3.3. *$U_n(\mathbb{C})$ i $SU_n(\mathbb{C})$ són compactes.*

OBSERVACIÓ. No tots els subgrups són compactes, per exemple, els grups $UT_n(\mathbb{K})$ *i* $SUT_n(\mathbb{K})$ no ho són ja que no són fitats.

4. Connexió

Proposició 4.1. *$GL_n(\mathbb{R})$ no és connex*

Demostració. Sigui l'aplicació contínua del determinant.

$$det : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$$

és exhaustiva, si $GL_n(\mathbb{R})$ fos connex, aleshores la imatge també ho seria, però l'espai d'arribada no ho és i per tant no és connex. $\square$

Teorema 4.2. *El conjunt $SO_n(\mathbb{R})$ és arc-connex.*

Demostració. Per demostrar la connexió ho farem per inducció. Per a n = 2 tenim el cercle que òbviament és arc-connex. Suposarem que és cert per a $SO_{n-1}(\mathbb{R})$ i que $A \in SO_n(\mathbb{R})$. És suficient trobar un camí a $SO_n(\mathbb{R})$ entre la Id i A, perquè si hi ha un camí des de la Id fins A i B, llavors existeix un camí entre A i B.

Això equival a trobar un moviment continu agafant les bases $e_1, e_2, ..., e_n$ fins la posició final $Ae_1, Ae_2, ..., Ae_n$ (les columnes de A).

Si els vectors e_1 i Ae_1 són diferents, defineixen un pla Ψ, per tant, per la arc-connexió de $SO_2(\mathbb{R})$ podem moure e_1 continuament fins la posició Ae_1 per la rotació R de Ψ. És suficient moure contínuament $e_2, ..., e_n$ fins $Ae_2, ..., Ae_n$ respectivament i mantenint Ae_1 fixat. Notem que

- $Re_2, ..., Re_n$ són ortogonals a $Re_1 = Ae_1$, perquè $e_2, ..., e_n$ són ortogonals a e_1 i R preserva angles.
- $Ae_2, ..., Ae_n$ són ortogonals a Ae_1, perquè $e_2, ..., e_n$ són ortogonals a e_1 i A preserva angles.

Així el moviment que busquem pot tenir lloc a $\mathbb{R}^{n-1}$ de vectors ortogonals a Ae_1 on aquest existeix per la suposició que $SO_{n-1}(\mathbb{R})$ és arc-connex. Realitzant els dos moviments successivament - agafant e_1 fins Ae_1 i després $Re_2, ..., Re_n$ fins $Ae_2, ..., Ae_n$ - ens dóna el camí des de la Id fins A a $SO_n(\mathbb{R})$. □

Lema 4.3. *Cada element de $GL_n(\mathbb{R})$ té una descomposició polar, és a dir, cada matriu $\sigma \in GL_n(\mathbb{R})$ es pot expressar de la forma*

$$\sigma = PR$$

on P és una martiu simètrica definida positiva i $R \in O_n(\mathbb{R})$

Demostració. $(\sigma\sigma^t)^t = \sigma\sigma^t$, $\sigma\sigma^t$ és simètrica. Sigui a un VAP i v un VEP d'aquesta matriu. Aleshores si $<,>$ és el producte escalar

$$a < v, v > = < \sigma\sigma^t(v), v > = < \sigma^t(v), \sigma^t(v) >$$

veiem que $a \geq 0$, però com $\sigma\sigma^t$ té determinant diferent de 0, observem que $a > 0$. Per tant $\sigma\sigma^t$ és simètrica definida positiva, al ser simètrica existeix una matriu ortogonal $\beta \in O(n)$ tal que

$$\beta\sigma\sigma^t\beta^t$$

és diagonal. Com tots els valors propis són positius, podem aplicar-li l'arrel quadrara

$$(\beta\sigma\sigma^t\beta^t)^{1/2}$$

Aquesta matriu és diagonal i amb tots els valors propis positius. Sigui

$$P = \beta^t(\beta\sigma\sigma^t\beta^t)\beta,$$

i sigui

$$R = P^{-1}\sigma$$

Ja sabem que P és simètrica definida positiva, ara utilitzant que $P^2 = \sigma\sigma^t$ veurem que R és ortogonal

$$\begin{aligned} RR^t &= P^{-1}\sigma\sigma^t(P^{-1})^t = P^{-1}\sigma\sigma^t(P^t)^{-1} \\ &= P^{-1}\sigma\sigma^t P^{-1} = P^{-1}PPP^{-1} = I. \end{aligned}$$

Per tant és ortonormal. □

TEOREMA 4.4. *El conjunt $GL_n^+(\mathbb{R})$ és arc-connex connex.*

DEMOSTRACIÓ. Per demostrar utilitzarem la descomposició polar. Cada matriu $A \in GL_n(\mathbb{R})$ pot ser expressada de la forma

$$A = PR$$

on P és una matriu simètrica definida positiva i $R \in O_n(\mathbb{R})$.

Si $A \in GL_n(\mathbb{R})^+$ llavors A té una descomposició polar, on ara R té determinant positiu, és a dir, $R \in SO_n(\mathbb{R})$. Sigui

$$P_t = tId + (1-t)P$$

per a t $\in$ [0,1]. És obvi que la P_t és simètrica, ja que I i P ho són, ara ens falta veure que és definida positiva.

$$v^T P_t v = v^T (tI + (1-t)P)v = t \cdot v^T I v + (1-t) \cdot v^T P v$$

Com la Id i P són definides positives i t $\in$ [0,1], llavors P_t també ho és. Per tant el camí $t \mapsto P_t R$ és una corba contínua que uneix A amb R. Com $SO_n(\mathbb{R})$ és arc-connex, existeix un camí continu entre R i la Id. Així veiem que $GL_n(\mathbb{R})^+$ és arc-connex. □

OBSERVACIÓ. Amb el mateix raonament veiem que $GL_n^-(\mathbb{R})$ també és arc-connex, i podem deduir que $GL_n(\mathbb{R})$ té dos components connexes, $GL_n(\mathbb{R}) = GL_n^-(\mathbb{R}) \cup GL_n^+(\mathbb{R})$.

TEOREMA 4.5. *El conjunt $O_n(\mathbb{R})$ no és connex.*

DEMOSTRACIÓ. Utilitzarem l'aplicació contínua del determinant

$$det : O_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \{-1, 1\}$$

L'espai d'arribada té dues components connexes i l'aplicació és contínua, això implica que $O_n(\mathbb{R})$ també té dos components connexes. □

PROPOSICIÓ 4.6. *El grup unitari, $SL_n(\mathbb{R})$ és connex.*

DEMOSTRACIÓ. Si utilitzem un altre cop l'aplicació determinant, veiem que $det : SL_(\mathbb{R}) \longrightarrow 1$. Per tant com 1 és connex, $SL_n(\mathbb{R})$ també. □

TEOREMA 4.7. *El conjunt $SU_n(\mathbb{C})$ és arc-connex.*

DEMOSTRACIÓ. És similar a la de $SO_n(\mathbb{R})$. Tornarem a provar-ho per inducció de n, però el cas $n = 2$ és un mica més complicat. Utilitzarem la funció exponencial complexa e^{ix}, la qual és igual a $cos\ x + isin\ x$.

Donada $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ de $SU_2(\mathbb{C})$, observem que (α, β) és un vector unitari de $\mathbb{C}^2$, aleshores $\alpha = ucos\theta$ i $\beta = vsin\theta$ per alguns u, v amb norma 1. Això significa que $u = e^{i\phi}$ i $v = e^{i\psi}$ per alguns $\phi, \psi \in \mathbb{R}$.

Així
$$\alpha(t) = e^{i\phi t} cos\theta t, \quad \beta(t) = e^{i\psi t} sin\theta t, \quad \text{para} \ \ 0 \leq t \leq 1,$$
el qual ens dóna un camí continu $\begin{pmatrix} \alpha(t) & -\beta(t) \\ \bar{\beta}(t) & \bar{\alpha}(t) \end{pmatrix}$ des de Id i $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ a $SU_2(\mathbb{C})$. Per tant $SU_2(\mathbb{C})$ és arc-connex. □

TEOREMA 4.8. *El conjunt $U_n(\mathbb{C})$ és connex.*

DEMOSTRACIÓ. Podem escriure $U_n(\mathbb{C}) = U_1(\mathbb{C})$ x $SU_n(\mathbb{C})$, que és el producte de dos espais connexos. □

TEOREMA 4.9. *El conjunt $GL_n(\mathbb{C})$ és connex.*

DEMOSTRACIÓ. Tornarem a utilitzar la funció determinant, ara l'espai d'arribada seran els complexos
$$det : GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\}$$
En aquest cas l'espai d'arriba és connex, per tant $GL_n(\mathbb{C})$ també. □

PROPOSICIÓ 4.10. *$SL_n(\mathbb{C})$ és connex.*

DEMOSTRACIÓ. És connex ja que $SL_n(\mathbb{C}) = det^{-1}(1)$. □

5. Els quaternions

Els quaternions són una extensió dels nombres reals generada de manera similar als complexos, afegint les unitats imaginaries i, j, k de manera que
$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$
Un quaternió pot expressar-se com el conjunt
$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4,$$
el conjugat del quaternió és de la forma $a - bi - cj - dk$.

Equivalentment podem expressar el conjunt $\mathbb{H}$ com
$$\mathbb{H} = \{(a + bi) + (c + di)j : a + bi, c + di \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{C}^2.$$
$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} : z, w \in \mathbb{C} \right\}$$
Si ho observem com a bases de $\mathbb{R}$ tenim les matrius següents

$$\mathbf{1} = I, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

DEFINICIÓ 5.1. *El grup simplèctic és*

$$Sp_n(\mathbb{H}) = \{A \in GL_n(\mathbb{H}) : A^*A = I\}$$

on A^* és la conjugada de la transposta, és a dir, si els elements de A són de la forma $[a_{ij}]$, aleshores $[a_{ij}]^* = [\bar{a}_{ji}]$.

PROPOSICIÓ 5.2. *$Sp_n(\mathbb{H})$ és tancat, compacte i connex.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui l'aplicació

$$\begin{array}{rcl} f : GL_n(\mathbb{H}) & \to & M_n(\mathbb{H}) \\ A & \mapsto & f(A) = A^*A \end{array}$$

Com f és contínua i $Sp_n(\mathbb{H}) = f^{-1}(Id)$, aleshores és un tancat.

Aleshores, per veure que és compacte tenim que , com $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$, podem aplicar el teorema de Heine-Borel, tan sols hem de veure que és fitat. Com $Sp(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{H}) : A^*A = I\}$, aleshores els vectors d'A han de tenir norma 1, per tant és fitat i per Heine-Borel és compacte.

En quan a la connexió, farem una indiciació. Hauríem d'haver introduït el grup simplèctic especial ($SSp_n(\mathbb{H})$), i amb ell el determinant d'una matriu de quaternions, els quals no són commutatius. La demostració és similar a la del grup unitari,

$$Sp_n(\mathbb{H}) = Sp_1(\mathbb{H}) \times SSp_n(\mathbb{H})$$

□

Grup	Obert/Tancat	Compacte	Connex
$GL_n(\mathbb{R})$	Obert	No	No
$SL_n(\mathbb{R})$	Tancat	Si	Si
$O_n(\mathbb{R})$	Tancat	Si	No
$SO_n(\mathbb{R})$	Tancat	Si	Si
$GL_n(\mathbb{C})$	Obert	No	Si
$SL_n(\mathbb{C})$	Tancat	Si	Si
$U_n(\mathbb{C})$	Tancat	Si	Si
$SU_n(\mathbb{C})$	Tancat	Si	Si
$Sp_n(\mathbb{H})$	Tancat	Si	Si

6. Algunes relacions entre els grups matricials

- $SO_2(\mathbb{R}) \cong U_1(\mathbb{C})$

U(1) són els complexos amb norma 1, és a dir la circumferència S^1, per tant podem expressar el complex amb un angle, $e^{i\theta}$. Les matrius SO(2) són rotancions directes, són de la forma

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

el isomorfisme és

$$\begin{array}{rcc} f : U_1(\mathbb{C}) & \rightarrow & SO_2(\mathbb{R}) \\ e^{i\theta} & \mapsto & \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \end{array}$$

- $Sp_1(\mathbb{H}) \cong SU_2(\mathbb{C})$
Hem vist que podem escriure un quaternió $z + wj$ amb $z, w \in \mathbb{C}$ com una matrius $M_2(\mathbb{C})$ complexa $A = \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix}$. A aquesta matriu compleix que $A^*A = Id$. Per tant l'aplicació

$$\begin{array}{rcc} f : Sp_1(\mathbb{H}) & \rightarrow & SU_2(\mathbb{C}) \\ z + wj & \mapsto & \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} \end{array}$$

que es comprova fàcilment que és un isomorfisme.

7. Grups de matrius com a grups de Lie

Els grups de matrius són exemples d'un concepte més general, el de grup de Lie.

Definició 7.1. *Sigui G una varietat diferenciable la qual esdevé un grup topològic amb la funció multiplicació $mult : G \times G \longrightarrow G$ i la funció inversa $inv : G \longrightarrow G$. Aleshores G és un grup de Lie si les funcions anteriors són $\mathcal{C}^\infty$.*

Definició 7.2. *Sigui G un grup e Lie. Un subgrup tancat $H \leq G$ que és subvarietat s'anomena subgrup de Lie de G.*

Per a un grup de Lie G, sigui $g \in G$. Presentem les següents accions, les quals utilitzarem més endavant.

$$L_g : G \longrightarrow G; \quad L_g(x) = gx.$$

$$R_g : G \longrightarrow G; \quad R_g(x) = xg.$$

$$X_g : G \longrightarrow G; \quad X_g(x) = gx^{-1}g.$$

Proposició 7.3. *Per a $g \in G$ les funcions L_g, R_g, X_g són difeomorfismes amb inverses*

$$L_g^{-1} = L_{g^{-1}}, \quad R_g^{-1} = R_{g^{-1}}, \quad X_g^{-1} = X_{g^{-1}},$$

Demostració. Les cartes de $G \times G$ són de la forma següent

$$\phi_1 \times \phi_2 : U_1 \times U_2 \longrightarrow V_1 \times V_2,$$

on $\phi_k : U_k \longrightarrow V_k$ són cartes de G. Suposem que $\mu U_1 \times \mu U_2 \subseteq W \subseteq G$ on existeix una carta $\theta : W \longrightarrow Z$. La composició

$$\theta \circ \mu \circ (\phi_1 \times \phi_2)^{-1} = \theta \circ \mu \circ (\phi_1^{-1} \times \phi_2^{-1}) : V_1 \times V_2 \longrightarrow Z.$$

és diferenciable. Aleshores $L_g(x) = \mu(g, x)$, per tant, si $g \in U_1$ i $x \in U_2$, tenim

$$L_g(x) = \theta^{-1}(\theta \circ L_g \circ \phi_2^{-1}) \circ \phi_2(x).$$

Ara veiem que

$$\theta \circ \phi_2^{-1} : V_2 \longrightarrow Z$$

és diferenciable, ja que s'obté de $\theta \circ \mu \circ (\phi_1 \times \phi_2)^{-1}$, agafant la primera variable com constant.

Amb arguments similars ho demostrem per R_g. Per demostrar X_g, observem que

$$X_g = L_g \circ R_g = R_g \circ L_g,$$

i al ser composició de dos funcions diferenciables és diferenciable.

□

Proposició 7.4. *$GL_n(\mathbb{R})$ és un grup de Lie.*

Demostració. Com és un obert de $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, és una varietat diferenciable. A més la multiplicació de matrius i la inversa són difeomorfs, per tant $GL_n(\mathbb{R})$ és un grup de Lie. □

Ara enunciarem el teorema del valor regular, el qual ens permet identificar les subvarietats.

Definició 7.5. *Sigui $f : M \longrightarrow N$ una funció diferenciable entre les dues varietats i sigui $c \in N$. El punt c es diu que és valor regular de la funció f si para tot $f^{-1}(c) \neq 0$ i df_p és exhaustiva en tot punt $p \in f^{-1}(q)$.*

Teorema 7.6. *Teorema del valor regular*

Sigui $f : M \longrightarrow N$ amb $m \geq n$, una funció diferenciable i $c \in N$ un valor regular de f. Aleshores $f^{-1}(c) \subset M$ és una subvarietat de M amb dimnensió m-n.

Proposició 7.7. *$O_n(\mathbb{R})$ i $SO_n(\mathbb{R})$ són subgrups de Lie.*

Demostració. Els dos són subvarietats pel teorema del valor regular, són grups tancats i l'operació *mult* i *inv* són contínues □

Anàlogament

Proposició 7.8. *$U_n(\mathbb{C}), SU_n(\mathbb{C})$ i $Sp_n(\mathbb{H})$ són grups de Lie.*

Capítol 2
Àlgebra de Lie

Les varietats diferencials tenen espais tangents, i els espais tangents a grups de Lie tenen una estructura particular, l'àlgebra de Lie.

1. Espai tangent i àlgebres de Lie

Sigui G un grup matricial

DEFINICIÓ 1.1. *Una corba diferenciable G és una funció*

$$\gamma : (a, b) \to G \subseteq M_n(\mathbb{K})$$

per la qual, la derivada $\gamma'(t)$ existeix per a cada $t \in (a, b)$.

DEFINICIÓ 1.2. *El espai tangent a G en $U \in G$ és*

$$T_U G = \{\gamma'(0) \in M_n(\mathbb{K}) : \gamma \ una \ corba \ diferenciable \ a \ G \ amb \ \gamma(0) = U\}.$$

PROPOSICIÓ 1.3. *$T_U G$ és un subespai vectorial real de $\mathbb{K}^n$.*

DEMOSTRACIÓ. Suposem que α, β són corbes diferenciables a G, les quals $\alpha(0) = \beta(0) = U$. Aleshores

$$\gamma : dom \ \alpha \bigcap dom \ \beta \to G; \quad \gamma(t) = \alpha(t)U^{-1}\beta(t),$$

també és una corba diferenciable en G amb $\gamma(0) = U$. La regla del producte ara ens dóna

$$\gamma'(t) = \alpha'(t)U^{-1}\beta(t) + \alpha(t)U^{-1}\beta'(t)$$

llavors

$$\gamma'(0) = \alpha'(0)U^{-1}\beta(0) + \alpha(0)U^{-1}\beta'(0) = \alpha'(0) + \beta'(0)$$

això ens mostra que T_U és tancat amb l'operació de la suma.

Similarment, si $r \in \mathbb{R}$ i α és una corba diferenciable a G amb $\gamma(0) = U$, aleshores $\eta(t) = \alpha(rt)$ defineix una altra corba. A més

$$\eta'(0) = r\alpha'(0)$$

així veiem que $T_U G$ és tancat amb l'operació de la multiplicació. $\square$

DEFINICIÓ 1.4. *La dimensió d'un grup matricial G és*

$$dim\ G = dim_{\mathbb{R}}\ T_I G$$

Si G és complex, aleshores la dimensió complexa és

$$dim_{\mathbb{C}}\ G = dim_{\mathbb{C}}\ T_I G$$

Utilitzarem la notació $\mathfrak{g} = T_I G$ per al subespai vectorial real de $M_n(\mathbb{K})$. En efecte $\mathfrak{g}$ té una estructura algebraica interessant, l'anomenarem *àlgebra de Lie.*

DEFINICIÓ 1.5. *Una* $\mathbb{K}$*-àlgebra de Lie consisteix en un espai vectorial* $\mathfrak{a}$ *sobre el cos* $\mathbb{K}$*, dotat amb una funció* $\mathbb{K}$*-bilinial* $[\ ,\ ]$*:* $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ *tal que si* $x, y, z \in \mathfrak{a}$*,*

$$[x, y] = -[x, y]$$
$$[x, [y, z]] + [y, [x, z]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Aquí la $\mathbb{K}$-bilinialitat es definex tal que per tot $x_1 x_2, y_1, y_2, x, y \in \mathfrak{a}$ i $r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{K}$

$$[r_1 x_1 + r_2 x_2, y] = r_1[x_1, y] + r_2[x_2, y]$$
$$[x, s_1 y_1 + s_2 y_2] = s_1[x, y_2] + s_2[x, y_2]$$

on [,] s'anomena el claudàtor de Lie de l'àlgebra de Lie $\mathfrak{a}$.

Un exemple és el producte vectorial a $\mathbb{R}^3$, que com veurem més endavant és l'àlgebra ed Lie de $SO_3(\mathbb{R})$ i també de $SU_2(\mathbb{C})$.

EXEMPLE. $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$

Donades dues matrius $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ el commutador és

$$[A, B] = AB - BA.$$

Aquesta és una funció $\mathbb{K}$-bilinial $M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ satisfent les condicions de la definició anterior. En el cas que A i B commutin, l'operador del commutador és igual a 0_n, la matriu de zeros $n \times n$.

$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) = (GL_n(\mathbb{K}), [,])$ és una àlgebra de Lie.

La noció de subàlgebra de Lie és immediata, és un subgrup que té estructura d'àlgebra de Lie.

TEOREMA 1.6. *Per a* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*, si* $G \leq GL_n(\mathbb{K})$ *és un subgrup de matrius, llavors* $\mathfrak{g}$ *és una* $\mathbb{R}$*-subàlgebra de Lie de* $M_n(\mathbb{K})$*.*

DEMOSTRACIÓ. Mostrarem que per a dues corbes diferenciables α, β de G, amb $\alpha(0) = \beta(0) = I_n$, hi ha una corba γ amb $\gamma'(0) = [\alpha'(0), \beta'(0)]$. Considerem la funció

$$F : dom\ \alpha \times dom\ \beta \to G; \quad F(s,t) = \alpha(s)\beta(t)\alpha(s)^{-1}$$

Aquesta és contínua i diferenciable respecte les variables s,t. Per a cada $s \in dom\ \alpha$, F(s,) és una corba diferenciablea G amb F(s,0) $= Id_n$. Derivant obtenim

$$\frac{dF(s,t)}{dt}_{|t=0} = \alpha(s)\beta'(0)\alpha(s)^{-1}$$

i llavors

$$\alpha(s)\beta'(0)\alpha(s)^{-1} \in \mathfrak{g}$$

Com que $\mathfrak{g}$ és un subespai tancat de $M_n(\mathbb{K})$, sempre i quan el límit existeixi obtenim que

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s}(\alpha(s)\beta'(0)\alpha(s)^{-1} - \beta(0)) \in \mathfrak{g}$$

Usarem la següent fórmula coneguda per a derivar la inversa:

$$\frac{d}{dt}(\alpha(t)^{-1}) = -\alpha(t)^{-1}\alpha'(t)\alpha(t)^{-1}$$

tenim

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0} \frac{1}{s}(\alpha(s)\beta'(0)\alpha(s)^{-1} - \beta(0)) &= \frac{d}{ds}_{|s=0}\alpha(s)\beta'(0)\alpha(s)^{-1} \\
&= \alpha'(0)\beta'(0)\alpha(0)^{-1} - \alpha(0)\beta'(0)\alpha(0)^{-1}\alpha'(0)\alpha(0)^{-1} \\
&= \alpha'(0)\beta'(0) - \beta'(0)\alpha'(0) \\
&= [\alpha'(0), \beta'(0)]
\end{aligned}$$

Així demostrem que $[\alpha'(0), \beta'(0)] \in \mathfrak{g}$. □

Per tant, per a cada grup de matrius G, existeix una àlgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_I G$. Un tipus adequat d'homomorfisme $G \to H$ entre grups de matrius dóna lloc a una transformació lineal $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ respectant l'estructura d'àlgebra de Lie.

DEFINICIÓ 1.7. *Siguin $G \leq GL_n(\mathbb{K}), H \leq GL_m(\mathbb{K})$ grups de matrius i $\phi : G \to H$ una funció contínua. Aleshores ϕ es diu una funció diferenciable si per a qualsevol* *corba diferenciable $\gamma : (a,b) \to G$, la corba composada $\phi \circ \gamma : (a,b) \to H$ és diferenciable, amb derivada*

$$(\phi \circ \gamma)'(t) = \frac{d}{dt}\phi(\gamma(t))$$

i sempre que dues corbes $\mathcal{C}^\infty$ $\alpha, \beta : (a,b) \to G$ les dues satisfan les condicions

$$\alpha(0) = \beta(0), \quad \alpha'(0) = \beta'(0),$$

llavors

$$(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0).$$

Sigui $\phi : G \to H$ un homomorfisme diferenciable i $\phi(Id) = Id$, $d_{\phi_{Id}} : T_{Id}G \to T_{Id}H$ una transformació linial anomenada *derivat de* ϕ la qual denotarem com

$$d_\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}.$$

DEFINICIÓ 1.8. *Siguin $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ àlgebres de Lie sobre el cos $\mathbb{K}$. Una transformació $\mathbb{K}$-linial $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ és un homomorfisme d'àlgebres de Lie si*

$$\phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)] \quad (x, y \in \mathfrak{g})$$

TEOREMA 1.9. *Siguin G, H grups de matrius i $\psi : G \to H$ un homomorfisme diferenciable. Aleshores el derivat $d_\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ és un homomorfisme d'àlgebres de Lie.*

DEMOSTRACIÓ. Per demostrar-ho es segueixen les idees del teorema 1.6, per a corbes diferenciables α, β en G amb $\alpha(0) = \beta(0) = Id$. Podem usar la composició de funcions $\psi \circ F$ donada per

$$\psi \circ F(s,t) = \psi(F(s,t)) = \psi(\alpha(s))\psi(\beta(t))\psi(\alpha(s))^{-1}$$

per deduir

$$d_\psi([\alpha'(0), \beta'(0)]) = [d_\psi(\alpha'(0)), d_\psi(\beta'(0))]$$

□

OBSERVACIÓ. Si $G \longrightarrow H$ és isomorfisme, aleshores $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ és isomorfisme, en particular, $dim\ \mathfrak{g} = dim\ \mathfrak{h}$.

2. Exponencial i logaritme

Sigui $A \in M_n(\mathbb{K})$, definim les següents sèries matricials

$$Exp(A) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} A^n = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + ...$$

$$Log(A) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} A^n = A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 - \frac{1}{4}A^4 + ...$$

Aquestes sèries convergeixen sempre i que $||A||$ sigui menor que el radi de convergència, en aquest cas ∞ i 1, respectivament.

Proposició 2.1. *Sigui $A \in M_n(\mathbb{K})$.*

a) Per $u.v \in \mathbb{C}$, $Exp((u+v)A) = Exp(uA)Exp(vA)$

b) $Exp(A) \in GL_n(\mathbb{K})$ and $Exp(A)^{-1} = Exp(-A)$

Demostració. a) Utilitzant la sèrie de potencies obtenim:

$$\begin{aligned} Exp((u+v)A) &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}(u+v)^n A^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{(u+v)^n}{n!} A^n \end{aligned}$$

Manipulant podem arribar a comprovar que la sèrie és absolutament convergent,

$$\begin{aligned} Exp(uA)Exp(vA) &= \left(\sum_{r\geq 0} \frac{u^r}{r!} A^r\right)\left(\sum_{s\geq 0} \frac{v^s}{s!} A^s\right) \\ &= \sum_{r,s\geq 0} \frac{u^r v^s}{r!s!} A^{r+s} \\ &= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{r=0}^{n} \frac{u^r v^{n-r}}{r!(n-r)!}\right) A^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u^r v^{n-r}\right) A^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{(u+v)^n}{n!} A^n \\ &= Exp((u+v)A). \end{aligned}$$

b) Per l'apartat (a),

$$I = Exp(0) = Exp((1 + (-1))A) = Exp(A)Exp(-A),$$

per tant Exp(A) és invertible i té inversa Exp(-A). □

Utilitzant les sèries de potències podem definir la funció exponencialcom

$$exp : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow GK_n(\mathbb{K});\ exp(A) = Exp(A).$$

PROPOSICIÓ 2.2. *Si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ commuten, llavors*

$$exp(A + B) = exp(A)exp(B).$$

DEMOSTRACIÓ. Tornem a manipular les sèries de potències, totes les manipulacions estan justificades perquè són sèries absolutament convergents.

$$\begin{aligned}
exp(A)exp(B) &= \left(\sum_{r\geq 0}\frac{u^r}{r!}A^r\right)\left(\sum_{s\geq 0}\frac{v^s}{s!}B^s\right)\\
&= \sum_{r,s\geq 0}\frac{u^r v^s}{r!s!}A^r B^s\\
&= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!(n-r)!}A^r B^{n-r}\right)\\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\left(\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}A^r B^{n-r}\right)\\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}(A+B)^n\\
&= Exp(A+B).
\end{aligned}$$

Veiem que la commutivitat l'hem uutilitzat en la igualtat

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}A^r B^{n-r} = (A+B)^n$$

□

Ara deifinim la *funció logaritme*

$$log : N_{M_n(\mathbb{K})}(Id; 1) \longrightarrow M_n(\mathbb{K}); \quad log(A) = Log(A - Id),$$

on $N_{M_n(\mathbb{K})}(Id;1) = \{B \in M_n(\mathbb{K}) : ||B - Id|| < 1\}$. Llavors per als A tals que $||A - I|| < 1$

$$Log(A) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(A - Id)^n$$

PROPOSICIÓ 2.3. *Les funcions exp i log satisfan:*

a) si $||A - Id|| < 1$*, llavors exp(log(A)) = A;*

b) si $||exp(B) - Id|| < 1$*, llavors log(exp(B))=B.*

DEMOSTRACIÓ. Els resultats es dedueixen a partir de les entitats següents:

$$\sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(X-1)^n \right)^m$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} X^m \right)^n$$

□

TEOREMA 2.4. *La funció exponencial és injectiva quan es restringeix al subconjunt obert* $N_{M_n(\mathbb{K})}(0; ln2) \subseteq M_n(\mathbb{K})$*, per tant, és un difeomorfisme local en un entorn del 0 i amb inversa local la funció log.*

3. Subgrups uniparamètrics

Considerem $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ un interval obert amb $a < b$. Sigui $G \leq GL_n(\mathbb{K})$ un grup de matrius i $\epsilon > 0$ o $\epsilon = \infty$.

DEFINICIÓ 3.1. *Un semigrup uniparamètric a G és una funció contínua* $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ *diferenciable en 0 i que satisfà*

$$\gamma(s + t) = \gamma(s)\gamma(t)$$

sempre i quan $s, t, (s+t) \in (-\epsilon, \epsilon)$*. A aquesta condició en referirem com la propietat de l'homomorfisme.*

Si $\epsilon = \infty$ aleshores $\gamma : \mathbb{R} \to G$ s'anomena *un subgrup uniparamètric* a G.

Observem que per a un semigrup uniparamètric a G, $\gamma(0) = Id$.

PROPOSICIÓ 3.2. *Sigui* $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ *un semigrup uniparamètric a G. Aleshores* γ *és diferenciable per qualsevol* $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ *i*

$$\gamma'(t) = \gamma'(0)\gamma(t) = \gamma(t)\gamma'(0)$$

DEMOSTRACIÓ. Per qualsevol $h \in \mathbb{R}$ prou petita

$$\gamma(h)\gamma(t) = \gamma(h+t) = \gamma(t+h) = \gamma(t)\gamma(h)$$

després

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\gamma(t+h) - \gamma(t)) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\gamma(h) - I)\gamma(t)) \\ &= \gamma'(0)\gamma(t). \end{aligned}$$

De manera similar obtenim que

$$\gamma'(t) = \gamma(t)\gamma'(0).$$

□

PROPOSICIÓ 3.3. *Sigui $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ un semigrup uniparamètric a G. Aleshores hi ha una única extensió a un grup uniparamètric $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \to G$ en G tal que per tota $t \in (-\epsilon, \epsilon), \hat{\gamma}(t) = \gamma(t)$.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $t \in \mathbb{R}$. Llavors per a un nombre natural m prou gran, $t/m \in (-\epsilon, \epsilon)$. Aleshores

$$\gamma(t/m), \gamma(t/m)^m \in G$$

Fem el mateix per a un segon nombre n,

$$\gamma(t/n), \gamma(t/n)^n \in G$$

Com $mn > m, n$ tenim que $t/nm \in (-\epsilon, \epsilon)$ i

$$\begin{aligned} \gamma(t/n)^n &= \gamma(tm/nm)^n \\ &= \gamma(t/mn)^{nm} \\ &= \gamma(nt/mn)^m \\ &= \gamma(t/m)^m. \end{aligned}$$

Per tant $\gamma(t/n)^n = \gamma(t/m)^m$ i veiem que tenim un element ben definit de G per a cada t real. Això defineix la funció

$$\hat{\gamma} : \mathbb{R} \to G; \hat{\gamma}(t) = \gamma(t/n)^n \quad \textit{per a n prou gran}$$

Observem que $\hat{\gamma}$ és un grup uniparamètric a G. □

Ara podem determinar la forma de tots els grups uniparamètric a $GL_n(\mathbb{K})$.

TEOREMA 3.4. *Sigui $\gamma : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{K})$ sigui un grup uniparamètric. Llavors és de la forma*

$$\gamma(t) = exp(tA)$$

per algun $A \in M_n(\mathbb{K})$

DEMOSTRACIÓ. Sigui $A = \gamma'(0)$. Sabem per la proposició 2.5 que satisfà l'equació diferencial

$$\gamma'(t) = A\gamma(t), \gamma(0) = Id$$

Sabem que la solució d'aquesta equació diferencial és $\gamma(t) = exp(tA)$. □

4. Àlgebra de Lie de $SO_3(\mathbb{R})$ i $SU_2(\mathbb{C})$

Discutirem l'àlgebra de Lie dels dos grups anteriors, totes dues són espais vectorial reals de dimensió 3, per exemple tenen les bases següents:

$$\mathfrak{so}_3(\mathbb{R}): \quad P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{su}_2(\mathbb{C}): \quad H = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad E = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Aleshores els claudàtors de Lie són

$$[P, Q] = R, \qquad [Q, R] = P, \qquad [R, P] = Q, \tag{1}$$

$$[E, F] = H, \qquad [H, E] = F, \qquad [F, H] = E. \tag{2}$$

Per tant el isomorfisme lineal

$$\phi : \mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{so}_3(\mathbb{R}); \quad \phi(xH + yE + zF) = xP + yQ + zR \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$$

satisfà

$$\phi([U, V]) = [\phi(U), \phi(V)],$$

per tant, és un isomorfisme d'àlgebres de Lie. Recordem que $\mathbb{R}^3$ i l'operació del producte vectorial és una àlgebra de Lie, aleshores la transformació lineal

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathfrak{so}_3; \quad xe_1 + ye_2 + ze_3 = xP + yQ + zR,$$

és un isomorfisme entre àlgebres de Lie.

Ara construirem un homomorfismede Lie $SU_2(\mathbb{C}) \longrightarrow SO_3(\mathbb{R})$ amb la derivada a la Id és ϕ. Recordem que l'acció adjunta de $SU_2(\mathbb{C})$ sobre $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ és

$$Ad_A(U) = AUA^{-1} = AUA^* \quad (A \in SU_2(\mathbb{C}),\ U \in \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})).$$

Cada Ad_A és un isomorfisme entre $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$.

Definim el producte intern $(\ |\ )$ a $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ commutador

$$(X|Y) = -tr(XY) \quad (X, Y \in \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})).$$

Introduint els següents elements

$$\hat{H} = \sqrt{2}H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \hat{E} = \sqrt{2}E = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{F} = \sqrt{2}F = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix},$$

obtenim un isomorfisme lineal

$$\theta : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathfrak{su}_2(\mathbb{C}); \quad \theta(xe_1 + ye_2 + ze_3) = x\hat{H} + y\hat{E} + z\hat{F}$$

,

el qual és una isometria ja que $\hat{H}, \hat{E}, \hat{F}$ són una base ortonormal de $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ respecte a $(\ |\ )$, en efecte

$$(\hat{H}|\hat{H}) = (\hat{E}|\hat{E}) = (\hat{F}|\hat{F}) = 1,$$
$$(\hat{H}|\hat{E}) = (\hat{H}|\hat{F}) = (\hat{E}|\hat{F}) = 0.$$

Utilitzarem la base ortonormal, d'aquesta manera els càlculs seran més clars

Proposició 4.1. *$(\ |\ )$ és bilineal, simètric i real sobre $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ el qual és definit positiu. És invariant en el sentit que*

$$([Z, X]|Y) + (X|[Z, Y]) = 0 \quad (X, Y, Z \in \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})).$$

Demostració. La $\mathbb{R}$-bilinealitat és directa ja que és simètric. Per veure que és definit positiu, observem que per a $x, x', y, y', z, z' \in \mathbb{R}$,

$$(x\hat{H} + y\hat{E} + z\hat{F}|x'\hat{H} + y'\hat{E} + z'\hat{F}) = xx' + yy' + zz'$$

i particularment

$$(x\hat{H} + y\hat{E} + z\hat{F}|x\hat{H} + y\hat{E} + z\hat{F}) = x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$$

és igual a 0 si $x = y = z = 0$. Per comprovar la invariància és fa calculant. □

A més per a $A \in SU_2(\mathbb{C})$ i $X, Y \in \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}(AXA^*|AYA^*) &= -tr(AXA^*AYA^*) \\ &= -tr(AXYA^*) \\ &= -tr(AXYA^{-1}) \\ &= -tr(XY) \\ &= (X|Y),\end{aligned}$$

per tant Ad_A és una transformació lineal ortogonal respecte al producte intern. Si usem les bases ortonormals $\hat{E}, \hat{H}, \hat{F}$ podem identificar $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ amb $\mathbb{R}^3$ i $(\ |\ )$ amb el producte usual intern, aleshores cada Ad_A correspon a un element de $O_3(\mathbb{R})$ el qual escriurem com Ad_A. És senzill veure que la funció

$$\overline{Ad} : SU_2(\mathbb{C}) \longrightarrow O_3(\mathbb{R}); \quad \overline{Ad}(A) = Ad_A \in O_3(\mathbb{R})$$

és un homomorfimes continu de grups. A més, $SU_2(\mathbb{C})$ és arc-connex com $SO_3(\mathbb{R})$ ja que $\overline{Ad}(Id) = Id$,

$$\overline{S}U_2(\mathbb{C}) \subseteq SO_3(\mathbb{R}),$$

per tant, redefinim

$$\overline{Ad} : SU_2(\mathbb{C}) \longrightarrow SO_3(\mathbb{R}); \quad \overline{Ad}(A) = Ad_A.$$

Proposició 4.2. *L'homomorfisme continu de grups de matrius*

$$\overline{Ad} : SU_2(\mathbb{C}) \longrightarrow SO_3(\mathbb{R}); \quad \overline{Ad}(A) = Ad_A.$$

és diferenciable, és exhaustiva i ker $\overline{Ad} = \{\pm Id\}$.

Sigui $B \in \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$. Aleshores la corba

$$\beta : \ \mathbb{R} \longrightarrow SU_2(\mathbb{C}); \quad \beta(t) = exp(tB),$$

ens dóna lloc a

$$\overline{\beta} : \ \mathbb{R} \longrightarrow SO_3(\mathbb{R}); \quad \overline{\beta(t)} = \overline{Ad}_{\beta(t)}.$$

Podem derivar $\overline{\beta}$ en $t = 0$ per obtenir un element de $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\overline{\beta}'(0)(X) &= \frac{d}{dt} exp(tB) X exp(-tB)_{|t=0} \\ &= BX - XB = [B, X].\end{aligned}$$

Per exemple quan $B = H$,

$$[H, H] = 0, \quad [H, E] = F, \quad [H, F] = -E,$$

per tant la matriu H actua sobre $SU_2(\mathbb{C})$ que amb base H, E, F és

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = R.$$

Similarment,

$$[E, H] = -F, \quad [E, E] = 0, \quad [E, F] = -H,$$

ens dóna lloc a la matriu

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Q.$$

i

$$[F, H] = E, \quad [F, E] = -H, \quad [F, F] = 0,$$

ens dóna lloc a

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P.$$

Per tant, la derivada correspon a la funció

$$d\overline{Ad} : \mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{so}_3(\mathbb{R}); \quad d\overline{Ad}(xH + yE + zF) = xR + yQ + zP.$$

Encara que hi hagi canvi d'ordre, continua sent un isomorfisme.

Capítol 3
Espais homogenis

Introduirem els espais homogenis a partir dels grups de Lie i veurem alguns exemples, concretament, els espais projectius i les grasmanianes. A més també veurem un resultat general sobre la connectivitat dels grups de matrius, i el relacionarem amb l'apartat tractat al primer capítol.

1. Espais homogenis com varietats diferencials

Sigui G un grup de Lie de dimensió n i $H \leq G$ un subgrup tancat, el qual és un subgrup de Lie de dimensió k. El conjunt de les classes per l'esquerra

$$G/H = \{gH : g \in G\}$$

té una funció quocient associada

$$\pi : G \longrightarrow G/H; \quad \pi(g) = gH.$$

Aleshores G/H té la topologia quocient: un subconjunt $W \subseteq G/H$ és obert si i només si $\pi^{-1}W \subseteq G$ és obert.

Lema 1.1.

La projecció $\pi : G \longrightarrow G/H$ és una funció oberta i G/H és un espai topològic separable i Hausdorff.

Demostració. Per a $U \subseteq G$

$$\pi^{-1}(\pi U) = \bigcup_{h \in H} Uh,$$

on

$$Uh = \{uh \in G : u \in U\} \subseteq G.$$

Si $U \subseteq G$ és obert, aleshores cada Uh ($h \in H$) és obert, això implica $\pi U \subseteq G$ també és obert.

G/H és seprable ja que una base contable de G és projectada a una col·lecció contable de subconjunts oberts de G/H que també són bases.

Per veure que G/H és Hausdorff, considerarem la funció contínua

$$\theta : G \times G :\longrightarrow G; \quad \theta(x,y) = x^{-1}y.$$

Llavors

$$\theta^{-1}H = \{(x,y) \in G \times G : xH = yH\}$$

aquest és un subconjunt tancat ja que $H \subseteq G$ és tancat. Així

$$\{(x,y) \in G \times G : xH \neq yH\} \subseteq G \times G$$

és obert. Per definició de la topologia producte, sempre i que $x, y \in G$ amb $xH \neq yH$, hi ha subconjunts oberts $U, V \subseteq G$ amb $x \in U, y \in V, U \neq V$ i $\pi U \cap \pi V = \emptyset$. I com $\pi U, \pi V \subseteq G/H$ són oberts, demostra que G/H és Hausdorff. □

Recordem la propietat universal de la topologia quocient

PROPOSICIÓ 1.2. *Per un espai topològic X, una funció $f : G/H \longrightarrow X$ és contínua si i només si $f \circ \pi : G \longrightarrow X$ és contínua.*

Ara, donarem una estructura a G/H de varietat diferencial per tal de què $\pi : G \longrightarrow G/H$ sigui diferenciable. El següent teorema el considerarem cert i no el demostrarem.

TEOREMA 1.3. *G/H té estructura de varietat diferencial de dimensió*

$$dim\ G/H = dim\ G - dim\ H$$

per tant la projecció $\pi : G \longrightarrow G/H$ és diferenciable i en cada $g \in G$,

$$ker(d\pi : T_gG \longrightarrow T_{gH}G/H) = dL_g\mathfrak{h}$$

Hi ha una família de cartes per a G/H que consisteix en funcions de la forma $\theta : W \longrightarrow \theta W \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ per ak qual hi ha un difeomorfisme $\Theta : W \times H \longrightarrow \pi^{-1}W$ que satisfà les condicions següents

$$\Theta(w, h_1, h_2) = \Theta(w, h_1)h_2, \quad \pi(\Theta(w,h)) = w \quad (w \in W, h_1, h_2, h \in H)$$

$$\begin{tikzcd} W \times H \arrow[rr, "\Theta"] \arrow[dr, "proj_1"'] & & \pi^{-1}W \arrow[dl, "\pi"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

Per a cada carta, la funció Θ es diu que ens proporciona una trivilització local de π sobre W. Si enlloc d'una carta tenim una familia de cartes, aleshores $(\theta : W \longrightarrow \theta W, \Theta)$ ens proporciona una trivialització local de π. Això ens connecta amb la noció dels H-fibrats principals.

Una família de cartes per G la podem obtenir agafant cada par $(\theta : W \longrightarrow \theta W, \Theta)$ de la família de cartes i combinant amb la carta $\psi : U \longrightarrow \psi U \subseteq \mathbb{R}^k$. D'aquesta manera obtenim el mapa següent

$$(\theta \times \psi) \circ \Theta^{-1} : \Theta(W \times U) \longrightarrow \theta W \times \psi U \subseteq \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n$$

Una varietat G/H s'anomena *espai homogeni*, per tant cada acció per l'esquerra dóna lloc a un difeomorfisme

$$\hat{L}_g : G/H \longrightarrow G/H; \quad \hat{L}_g(xH) = gxH,$$

Per al qual $\pi \circ L_g = \hat{L}_g \circ \pi$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "L_g"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/H \arrow[r, "\hat{L}_g"] & G/H \end{tikzcd}$$

Cada punt gH té un entorn difeomorf, per tant localment G/H és invariant.

2. Espais homogenis com òrbites

En la teoria de grups ordinària les accions de grup tenen òrbites equivalent als conjunts de les classes lateral G/H, per tant els espais homogenis també tenen òrbites associades a accions de grup diferenciables de G en varietats.

TEOREMA 2.1. *Suposem que un grup de Lie G actua sobre una varietat M. Si l'element $x \in M$ té estabilitzador $Stab_G(x) \leq G$ i òrbita $Orb_G(x) \subseteq M$ és una subvarietat tancada, aleshores la funció*

$$f : G/Stab_G(x) \longrightarrow Orb_G(x); \quad f(gStab_G(x)) = gx$$

és un difeomorfisme

EXEMPLE. Per a $n \geq 1$, $O_n(\mathbb{R})$ actua diferenciablement sobre $\mathbb{R}^n$ per la multiplicació de matrius. Per a un vector $v \in \mathbb{R}^n$, la òrbita $Orb_{O_n(\mathbb{R})}(v) \subseteq \mathbb{R}^n$ és difeomorf a $O_n(\mathbb{R})/O_{n-1}(\mathbb{R})$. Com la $Orb_{O_n(\mathbb{R})} = \mathbb{S}^{n-1}$

$$O_n(\mathbb{R})/O_{n-1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{S}^{n-1}.$$

DEMOSTRACIÓ. Observem que v és un vector de la base ordinària e_n, per a $A \in O_n(\mathbb{R})$, $Ae_n = e_n$ si i només si e_n és la última columna de A, mentre tota la resta de les columnes de A són ortogonals a e_n. Per tant les columnes de A han de ser un conjunt de vector ortonormals, això significa que les primeres n-1 columnes de A són de la forma

$$\begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{n-1k} \\ 0 \end{bmatrix}$$

on la matriu

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{bmatrix}$$

és ortogonal i així pertany a $O_{n-1}(\mathbb{R})$. Identifiquem $O_{n-1}(\mathbb{R})$ amb el subconjunt de $O_n(\mathbb{R})$ que consisteix en les matrius de la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

amb $Stab_{O_n(\mathbb{R})}(e_n) = O_{n-1}(\mathbb{R})$. La òrbita de e_n és tota la esfera $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$, per tant, donat un vector $\vec{u}$ el podem extendre a una base ortonormal $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_{n-1}, \vec{u}_n = \vec{u}$, els vectors formen les columnes d'una matriu ortogonal $U \in O_n(\mathbb{R})$ per al qual $Ue_n = \vec{u}$. Així tenim un difeomorfisme

$$O_n(\mathbb{R})/Stab_{O_n(\mathbb{R})}(e_n) = O_n(\mathbb{R})/O_{n-1}(\mathbb{R}) \longrightarrow Orb_{O_n(\mathbb{R})}(e_n) = \mathbb{S}^{n-1}.$$

Per a un vector diferent de zero $\vec{v}$ notem que $Stab_{O_n(\mathbb{R})}(\vec{v}) = Stab_{O_n(\mathbb{R})}(\hat{v})$ on $\hat{v} = (1/|\vec{v}|)\vec{v}$ i

$$Orb_{O_n(\mathbb{R})}(\vec{v}) = \mathbb{S}^{n-1}(|\vec{v}|),$$

la esfera de radi $|\vec{v}|$. Si ara triem algun $P \in O_n(\mathbb{R})$ amb $\hat{v} = Pe_n$ tenim

$$Stab_{O_n(\mathbb{R})}(\vec{v}) = PStab_{O_n(\mathbb{R})}(e_n)P^{-1}$$

i per tant tenim un difeomorfisme

$$Orb_{O_n(\mathbb{R})}(\vec{v}) \longrightarrow O_n(\mathbb{R})/PO_{n-1}(\mathbb{R})P^{-1} \longrightarrow O_n(\mathbb{R})/O_{n-1}(\mathbb{R})$$

$\square$

Per al grup ortogonal especial tenim un resultat similar. Per als complexos obtenim els espais homogenis $U_n(\mathbb{C})/U_{n-1}(\mathbb{C})$ *i* $SU_n(\mathbb{C})/SU_{n-1}(\mathbb{C})$, aquestes òrbites són difeomorfes a $\mathbb{S}^{2n-1}$. En el cas del quaternions tenim que les orbites són difeomorfes a $Sp_n(\mathbb{H})/Sp_{n-1}(\mathbb{H})$ i $\mathbb{S}^{4n-1}$.

3. Espais projectius

Sigui $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ i $d = dim_{\mathbb{R}}\mathbb{K}$. Considerem $\mathbb{K}^{n+1}$ com un $\mathbb{K}$-espai vectorial. Aleshores hi ha una acció del grup de les unitats $\mathbb{K}^x$ sobre el subconjunt de vectors diferents de zero $\mathbb{K}_0^{n+1} = \mathbb{K}^{n+1} - \{0\}$.

$$zx = xz^{-1}$$

El conjunt de les òrbites el denotarem per $\mathbb{K}P^n$ i s'anomena el $\mathbb{K}$-*espai projectiu n-dimensional*. Un element de l'espai escrit [x] és un conjunt de la forma

$$[x] = \{xz^{-1} : z \in \mathbb{K}^x\} \subseteq \mathbb{K}_0^{n+1}$$

Notem que [x] = [y] si i només si existeix un $z \in \mathbb{K}^x$ tal que $y = xz^{-1}$.

Hi ha una funció quocient

$$q_n : \mathbb{K}_0^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}P^n; \quad q_n(x) = [x],$$

a la qual li assignem la topologia quocient que és Hausdorff i separable.

PROPOSICIÓ 3.1. *$\mathbb{K}P^n$ és una varietat diferencial de dimensió $\dim \mathbb{K}P^n = n\, dim_{\mathbb{R}}\mathbb{K}$. A més la funció quocient $q_n : \mathbb{K}_0^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}P^n$ és diferenciable amb derivada exhaustiva a cada punt de $\mathbb{K}_0^{n+1}$.*

DEMOSTRACIÓ. Per a r = 1,2,...,n i per als conjunts $\mathbb{K}P^n_r = \{[x] : x_r \neq 0\}$, normalment escrivim $x = [x_1, x_2, ...X_{n+1}]^t$. Aleshores $\mathbb{K}P^n_r \subseteq \mathbb{K}P^n$ és un obert. Hi ha una funció

$$\sigma_r : \mathbb{K}P^n_r \longrightarrow \mathbb{K}^n; \quad \sigma_r([x]) = \begin{bmatrix} x_1 x_r^{-1} \\ x_2 x_r^{-1} \\ \vdots \\ x_{r-1} x_r^{-1} \\ x_{r+1} x_r^{-1} \\ \vdots \\ x_{n+1} x_r^{-1} \end{bmatrix}$$

la qual és una bijecció contínua i és homeomorfisme. Sempre i que $r \neq s$ la funció induida

$$\sigma_s^{-1} \circ \sigma_r : \sigma_r^{-1} \mathbb{K}P^n_r \cap \mathbb{K}P^n_s \longrightarrow \sigma_s^{-1} \mathbb{K}P^n_r \cap \mathbb{K}P^n_s$$

ve donada per

$$\sigma_s^{-1} \circ \sigma_r(x) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{s-1} \\ y_{y+1} \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$$

on

$$y_j = \begin{cases} x_j x_s^{-1} & \text{si } j \neq r, s \\ x_s^{-1} & \text{si } j = r \end{cases}$$

Aquestes $n + 1$ cartes formen una família de cartes per un $\mathbb{K}$-espai projectiu de dimensió n. $\square$

Una altra alternativa de definir $\mathbb{K}P^n$ és considerant l'acció del subgrup

$$\mathbb{K}^x_1 = \{z \in \mathbb{K}^x : |z| = 1\} \leq \mathbb{K}^x$$

sobre la esfera unitat $\mathbb{S}^{(n+1)d-1} \subseteq \mathbb{K}^{n+1}_0$. Veiem que cada element $[x] \in \mathbb{K}P^n$ conté elements de $\mathbb{S}^n$. A més si $x, y \in \mathbb{K}^{n+1}_0$ tenen norma $|x| = |y| = 1$, aleshores [x] = [y] si i només si $y = xz^{-1}$ per algun $z \in \mathbb{K}^x_1$. Això significa que podem veure $\mathbb{K}P^n$

com l'espai de les òrbites de l'acció $\mathbb{K}_1^x$ sobre $\mathbb{S}^{(n+1)d-1}$, i també podem escriure la funció quocient $q_n : \mathbb{S}^{(n+1)d-1} \longrightarrow \mathbb{K}_1^x$; aquesta funció també és diferenciable.

PROPOSICIÓ 3.2. *L'espai quocient donat per* $q_n : \mathbb{S}^{(n+1)d-1} \longrightarrow \mathbb{K}_1^x$ *és compacte i Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓ. La imatge d'un espai compacte per una funció contínua és compacte.

Sigui $\mu \in \mathbb{K}_1^x$, com $\mathbb{S}^{(n+1)d-1}$ és normal i $q_n^{-1}(\mu)$ és tancat deduïm que és Hausdorff. □

Considerem la acció de $O_{n+1}(\mathbb{R})$ sobre la esfera unitat $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Llavors per a $A \in O_{n+1}(\mathbb{R}),\ z = \pm 1$ i $x \in \mathbb{S}^n$, tenim

$$A(xz^{-1}) = (Ax)z^{-1}.$$

Per tant hi ha una acció induïda de $O_{n+1}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}P^n$ donada per

$$A \cdot [x] = [Ax]$$

Aquesta acció és transitiva i també les matrius $\pm Id_{n+1}$ que fixen cada punt de $\mathbb{R}P^n$. També hi ha una acció de $SO_{n+1}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}P^n$. observem que $-Id_{n+1} \in SO_{n+1}(\mathbb{R})$ si i només si n és senar.

Similarment, $U_{n+1}(\mathbb{C})$ i $SU_{n+1}(\mathbb{C})$ actuen sobre $\mathbb{C}P^n$ amb matrius escalars wId_{n+1} ($w \in \mathbb{C}_1^x$) fixant cada element. Veiem que si $wId_{n+1} \in SU_{n+1}(\mathbb{C})$ llavors $w^{n+1} = 1$, per tant hi ha n+1 valors com a molt.

Finalment, $Sp_{n+1}(\mathbb{H})$ actua sobre $\mathbb{H}P^n$ i les matrius $\pm Id_{n+1}$ fixen tots els punts.

Hi ha alguns grups de Lie quocient associats a aquestes accions, l'*unitari projectiu, l'especial unitari*, i el *simplèctic quaternionic.*

$$PU_{n+1}(\mathbb{C}) = U_{n+1}(\mathbb{C})/\{wId_{n+1} : w \in \mathbb{C}_1^x\},$$

$$PSU_{n+1}(\mathbb{C}) = SU_{n+1}(\mathbb{C})/\{wId_{n+1} : w^{n+1} = 1\},$$

$$PSp_{n+1}(\mathbb{H}) = Sp_{n+1}(\mathbb{H})/\{\pm Id_{n+1}\},$$

Els espais projectius són espais homogenis també

PROPOSICIÓ 3.3. *Els següents espais són difeomorfs*

- $\mathbb{R}P^n$ *i* $O_{n+1}(\mathbb{R})/O_n(\mathbb{R}) \times O_1(\mathbb{R})$;
- $\mathbb{C}P^n$ *i* $U_{n+1}(\mathbb{C})/U_n(\mathbb{C}) \times U_1(\mathbb{R})$.

4. Grassmanianes

Una família important dels espais homogenis són les grassmanianes, que són generalitzacions dens espais projectius. Sigui $O_k(\mathbb{R}) \times O_{n-k}(\mathbb{R}) \leq O_n(\mathbb{R})$ un subgrup tancat amb elements de la forma

$$\begin{bmatrix} A & 0_{k,n-k} \\ 0_{n-k,k} & B \end{bmatrix} \ (A \in O_k(\mathbb{R}), B \in O_{n-k}(\mathbb{R}))$$

Similarment hi ha subgrups tancats $U_k(\mathbb{C}) \times U_{n-k}(\mathbb{C}) \leq U_n(\mathbb{C})$ i $Sp_k(\mathbb{H}) \times Sp_{n-k}(\mathbb{H}) \leq Sp_n(\mathbb{H})$ amb elements de la forma

$$U_k(\mathbb{C}) \times U_{n-k}(\mathbb{C}) : \begin{bmatrix} A & 0_{k,n-k} \\ 0_{n-k,k} & B \end{bmatrix} \quad (A \in U_k(\mathbb{C}), B \in U_{n-k}(\mathbb{C}))$$

$$Sp_k(\mathbb{H}) \times Sp_{n-k}(\mathbb{H}) : \begin{bmatrix} A & 0_{k,n-k} \\ 0_{n-k,k} & B \end{bmatrix} \quad (A \in Sp_k(\mathbb{H}), B \in Sp_{n-k}(\mathbb{H}))$$

Els espais homogenis associats són les grassmanianes

$$\begin{gathered} Gr_{k,n}(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R})/O_k(\mathbb{R}) \times O_{n-k}(\mathbb{R}); \\ Gr_{k,n}(\mathbb{C}) = U_n(\mathbb{C})/U_k(\mathbb{C}) \times U_{n-k}(\mathbb{C}); \\ Gr_{k,n}(\mathbb{H}) = Sp_n(\mathbb{H})/Sp_k(\mathbb{H}) \times Sp_{n-k}(\mathbb{H}). \end{gathered}$$

Proposició 4.1. *Per a $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, la grassmaniana $Gr_{k,n}(\mathbb{K})$ es pot veure com el conjunt de tots els $\mathbb{K}$-subespais vectorials de dimensió k a $\mathbb{K}^n$.*

Demostració. Farem el cas dels $\mathbb{R}$, els altres dos són similars.
Sigui $W \in O_n(\mathbb{R})$, el subespai generat per les k primeres columnes de W el denotarem com $\langle w_1, ..., w_k \rangle$. Com les columnes són ortonormals, aquestes són independents i per tant $dim_{\mathbb{R}} \langle w_1, ..., w_k \rangle = k$. Veiem que les n-k columnes restants ens donen lloc a un altre subespai $\langle w_{k+1}, ..., w_n \rangle$ amb dimensió $dim_{\mathbb{R}} \langle w_{k+1}, ..., w_n \rangle = n - k$. Efectivament aquests dos subespais són ortogonals

$$\begin{aligned} \langle w_{k+1}, ..., w_n \rangle &= \langle w_1, ..., w_k \rangle^{\perp} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot w_r = 0,\ r = 1, ..., k\}, \\ \langle w_1, ..., w_k \rangle &= \langle w_{k+1}, ..., w_n \rangle^{\perp} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot w_r = 0,\ r = k+1, ..., n\}. \end{aligned}$$

Per una matriu

$$\begin{bmatrix} A & 0_{k,n-k} \\ 0_{n-k,k} & B \end{bmatrix} \in O_k(\mathbb{R}) \times O_{n-k}(\mathbb{R})$$

les columnes en el producte

$$W' = W \begin{bmatrix} A & 0_{k,n-k} \\ 0_{n-k,k} & B \end{bmatrix}$$

generen subespais $\langle w'_1, ..., w'_k \rangle$ i $\left\langle w'_{k+1}, ..., w'_n \right\rangle$. Però observem que $w'_1, ..., w'_k$ són ortonormals i també combinacions linials de $w_1, ..., w_k$. El mateix passa amb $w'_{k+1}, ..., w'_n$ que són combinació linial de $w'_{k+1}, ..., w'_n$. Per tant generen el mateix subespai

$$\langle w'_1, ..., w'_k \rangle = \langle w_1, ..., w_k \rangle, \quad \langle w'_{k+1}, ..., w'_n \rangle = \langle w_{k+1}, ..., w_n \rangle .$$

Tenim una funció ben definida

$$O_n(\mathbb{R})/O_k(\mathbb{R}) \times O_{n-k}(\mathbb{R}) \longrightarrow \text{ subespai vectorial de dimensió k a } \mathbb{R}^n$$

el qual envia la classe lateral de W al subespai $\langle w_1, ..., w_k \rangle$. Amb aquesta funció tenim una bijecció.

Veiem que hi ha una altra bijecció

$$O_n(\mathbb{R})/O_k(\mathbb{R}) \times O_{n-k}(\mathbb{R}) \longrightarrow \text{ subespai vectorial de dimensió n-k a } \mathbb{R}^n$$

el qual envia la classe lateral de W al subespai $\langle w_{k+1}, ..., w_n \rangle$. Això correspon al difeomorfisme $Gr_{k,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow Gr_{n-k,n}(\mathbb{R})$ el qual correspon al isomorfisme $O_k(\mathbb{R}) \times O_{n-k}(\mathbb{R}) \longrightarrow O_{n-k}(\mathbb{R}) \times O_k(\mathbb{R})$ induït per conjugació per un element $P \in O_n(\mathbb{R})$ adequat. $\square$

5. Connectivitat dels grups de matrius

PROPOSICIÓ 5.1. *Sigui G un grup de Lie i $H \leq G$ un subgrup tancat. Si G/H i H són connexos, aleshores també ho és G.*

DEMOSTRACIÓ. Primer remarquem que per a qualsevol $g \in G$, la funció de translació per l'esquerra $L_g : H \longrightarrow gH$ proporciona un homeomorfisme entre els espais, per tant gH és connex ja que H ho és.

Ara suposem que G no és connex, i siguin $U, V \subseteq G$ dos subconjunts oberts i no buits tals que $U \cap V = \emptyset$ i $U \cup V = G$. Pel lemma 1.1 la projecció $\pi : G \longrightarrow G/H$ és una funció oberta i exhaustiva, per tant $\pi U, \pi V \subseteq G/H$ són subconjunts oberts per als quals $\pi U \cup \pi V = G/H$. Com G/H és connex, existeix un element gH que pertany a $\pi U \cap \pi V$. A G tenim

$$gH = (gH \cap U) \cup (gH \cap V),$$

on $(gH \cap U), (gH \cap V) \subseteq gH$ són oberts en el subespai topològic gH ja que U, V són oberts de G. Per conectivitatde gH, això només pot passar si $gH \cap U = \emptyset$ o

$gH \cap V = \emptyset$ perquè aquests són subconjunts de U,V els quals no tenen elements en comú. Com

$$\pi^{-1}gH = \{gh : h \in H\},$$

és fals, pel que $(gH \cap U) \cap (gH \cap V) \neq \emptyset$ el qual implica que $U \cap V \neq \emptyset$. Això contradiu la suposició inicial.

PROPOSICIÓ 5.2. *Sigui G un grup de Lie i $H \leq G$ un subgrup tancat. Si G/H i H són connexos, aleshores G és arc-connex.*

DEMOSTRACIÓ. La demostració és basa en el resultat de topologia on si un espai topologic és connex i localment arc-connex, aleshores l'espai topològic és arc-connex.

Anteriorment hem vist que G és connex, ara tan sols ens falta veure que és localment arc-connex. Per demostrar-ho veiem que cada punt d'una varietat té un entorn obert que és homeomorf a un subconjunt obert de $\mathbb{R}^n$, el qual podem agafar-lo com una bola oberta que és arc-connex.

EXEMPLE. Aplicarem el resultat anterior per veure la connexió d'alguns grups.

PROPOSICIÓ 5.3. *Per $n \geq 1$, $SL_n(\mathbb{R})$ és arc-connex*

DEMOSTRACIÓ. Per al cas real, ho farem per inducció sobre n. Veiem que $SL_n(\mathbb{R}) = \{1\}$ és connex. Suposem que $SL_{n-1}(\mathbb{R})$ és arc-connex per $n \geq 2$.

Recordem que $SL_n(\mathbb{R})$ actua contínuament sobre $\mathbb{R}^n$ amb la multiplicació de matrius. Considerem al funció contínua següent

$$f : SL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n; \quad f(A) = Ae_n.$$

La imatge de f és $Im\ f = \mathbb{R}^n_0 = \mathbb{R}^n - \{0\}$ ja que cada vector $v \in \mathbb{R}^n_0$ es pot extendre a una base

$$v_1 \cdots v_{n-1}, v_n = v$$

de $\mathbb{R}^n$, i podem multiplicar v_1 per un escalar adequat per assegurar-nos que la matriu A_v amb aquests vectors com a columnes té determinant 1. Aleshores $A_v e_n = v$.

Observem que $Pe_n = e_n$ si i només si

$$P = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ w & 1 \end{bmatrix}$$

on Q és una matriu $(n-1) \times (n-1)$ amb $det\ Q = 1$, 0 és el vector de zeros $(n-1) \times 1$ i w és un vector arbitrari $1 \times (n-1)$. El conjunt de totes aquestes matrius és l'estabilitzador de e_n, $Stab_{SL_n(\mathbb{R})}(e_n)$, el qual és un subgrup tancat del $SL_n(\mathbb{R})$. En general, $Ae_n = v$ si i només si

$$A = A_v P \text{ per algun } P \in Stab_{SL_n(\mathbb{R})}(e_n).$$

Així l'espai homogeni $SL_n(\mathbb{R})/Stab_{SL_n(\mathbb{R})}(e_n)$ és homeomorf a $\mathbb{R}^n_0$.

Com $n \geq 2$, R^n_0 és arc-connex, i per tant connex. Això implica que $SL_n(\mathbb{R})/Stab_{SL_n(\mathbb{R})}(e_n)$ és connex.

El subgrup $SL_{n-1}(\mathbb{R}) \leq Stab_{SL_n(\mathbb{R})}(e_n)$ és tancat i la funció

$$Stab_{SL_n(\mathbb{R})}(e_n)/SL_{n-1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$$

és un homeomorfisme, per tant l'espai homogeni $Stab_{SL_n(\mathbb{R})}(e_n)/SL_{n-1}(\mathbb{R})$ és homeomorf a $\mathbb{R}^{n-1}$. Com $\mathbb{R}^n$ és arc-connex, juntament amb la hipòtesi d'inducció, $Stab_{SL_n(\mathbb{R})}(e_n)$ és arc-connex. D'aquesta manera deduïm que $SL_n(\mathbb{R})$ és arc-connex.

Un altre resultat que ens servirà posteriorment és el següent

PROPOSICIÓ 5.4. *Sigui G un grup de Lie connex i $H \leq G$ un subgrup que conté un entorn obert de 1 en G. Aleshores $H = G$.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $U \subseteq H$ un entorn de 1 en G. Com la funció inversa $inv : G \longrightarrow G$ és un homeomorfisme i envia H a ell mateix, substituïnt U per $U \cap invU$ si és necessari, podem assumir que la funció inv envia entorns a ells mateixos, és a dir, $invU = U$. Per a $k \geq 1$ considerem

$$U^k = \{u_1 \cdots u_k \in G : u_j \in U\} \subseteq H$$

Veiem que $invU^k = U^k$. També $U^k \subseteq G$ és obert ja que per $u_1, ..., u_k \in U$,

$$u_1 \cdots u_k \in L_{u_1 \cdots u_{k-1}} U \subseteq U^k$$

on $L_{u_1 \cdots u_{k-1}} U = L^{-1}_{(u_1 \cdots u_{k-1})^{-1}} U$ és un subconjut obert de G. Aleshores

$$V = \bigcup_{k \geq 1} u^k \subseteq H$$

satisfà $inv\ V = V$.

V és tancat a G ja que donat $g \in G - V$, per al conjunt obert $gV \subseteq G$, si $x \in gV \cap V$ hi ha $u_1, ..., u_r, v_1, ..., v_s$ tal que

$$gu_1 \cdots u_r = v_1 \cdots v_s,$$

això implica que $g = v_1 \cdots v_s u_1^{-1} \cdots u_r^{-1} \in V$ contradint la hipòtesi inicial de g.

Així V és un subconjunt tancat i obert de G diferent de zero, el qual és connex. D'aquesta manera $G - V = \emptyset$, i a més $V = G$ que implica que $H = G$.

Capítol 4
Tors maximals

En aquest capítol descriurem alguns resultats de l'estructura dels grups de Lie connexos i compactes, ens centrarem amb els tors maximals, que són essencials per a la classificació de grups de Lie connexos i compactes.

1. Tors

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z|= 1\} \leq \mathbb{C}^x$$

Aquest grup és un grup de matrius ja que $\mathbb{C}^x = GL_1(\mathbb{C})$. Per a cada $r \geq 1$ el tor de *rangr* és

$$\mathbb{T}^r = \{diag(z_1, ..., z_r) : \forall k, |z_k|= 1\} \leq GL_r(\mathbb{C}).$$

és un grup de matrius de dimensió r. Identificarem els elements de $\mathbb{T}^r$ com la seqüencia de nombres complexos $(z_1, .., z_r)$ amb $|z_k|= 1$, que correspon a la identificació

$$\mathbb{T}^r \cong \mathbb{T} \times \cdots \times \mathbb{T} \leq (\mathbb{C}^x)^r$$

Un tor d'aquest tipus és un grup de Lie compacte, arc-connex i abelià.

PROPOSICIÓ 1.1. *Sigui $\mathbb{T}$ un tor, aleshores $\mathbb{T}^r$ és compacte, abelià i arc-connex.*

DEMOSTRACIÓ. Sabem que $\mathbb{T}$ és compacte i abelià, aleshores també ho és $\mathbb{T}^r$. Ara hem de veure que és arc-connex. Si $(z_1, ..., z_r) \in \mathbb{T}^r$, sigui $z_k = e^{\theta_k}$. Llavors existeix un camí

$$p : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{T}^r; \quad p(t) = (e^{t\theta_1}, ..., e^{t\theta_r})$$

amb p(0) = (1,...,1) i p(1) = $(z_1, ..., z_r)$. Per tant $\mathbb{T}^r$ és arc-connex.

□

Teorema 1.2. *Sigui H un grup de matrius compacte. Aleshores H és un tor si i només si és connex i abelià.*

Demostració. Per la proposició anterior la implicació cap a la dreta és directa.

Suposem que $dim H = r$ i sigui $\mathfrak{h}$ l'àlgebra de Lie de H, aleshores $dim\ \mathfrak{h}$ = r. Per la definició del claudàtor de Lie en la demostració del teorema 1.6, per a $X, Y \in \mathfrak{h}$,

$$[X,Y] = \frac{d}{ds}_{|s=0} \frac{d}{dt}_{|t=0} exp(sX)exp(tY)exp(-sX) = 0$$

per tant exp(sX), exp(tY) $\in H$ i exp(sX)exp(tY)exp(-sX) = exp(tY) perquè H és abelià. Així tots els claudàtors de Lie a $\mathfrak{h}$ són 0. Considerem la funció exponencial $exp : \mathfrak{h} \longrightarrow H$. Per a X,Y $\in \mathfrak{h}$, les proposicions 2.1 i 2.2 ens donen

$$exp(X)exp(Y) = exp(X+Y), \quad exp(-X) = exp(X)^{-1}$$

Per tant $exp\ \mathfrak{h} = im\ exp \subseteq H$ és un subgrup. Per la proposició 2.4 $exp\mathfrak{h}$ és un subgrup que conté un entorn del 1, i per la proposició 5.4, exp $\mathfrak{h} = H$.

Com exp és un homomorfisme continu, el nucli de K és igual al nucli de la exp ha de ser discret, és a dir, dim $exp\ \mathfrak{h} < r$. Això significa que $K \subseteq \mathfrak{h}$ és un subgrup abelià amb base $\{v_1, ..., v_s\}$ per algun $s \leq r$. Si ho extenem a una base $\{v_1, ..., v_s, v_{s+1}, ..., v_r\}$ de $\mathfrak{h}$ obtenim l'isomorfisme de grups de Lie

$$exp(\mathfrak{h}) \cong \mathfrak{h}/K \cong \mathbb{R}^s/\mathbb{Z}^s \times \mathbb{R}^{r-s}.$$

Per una altra banda és compacte si i només si s = r, per tant K conté una base de $\mathfrak{h}$ i

$$\mathbb{R}^r/\mathbb{Z}^r \cong \mathfrak{h}/K \cong H.$$

Com $T \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, obtenim que H té estructura de tor.

$\square$

En la demostració anterior hem usat la següent proposició.

Proposició 1.3. *Sigui G un tor de rang r. Aleshores la funció exponencial* $exp : \mathfrak{t} \longrightarrow T$ *és un homomorfisme exhaustiu de grups de matrius, el nucli del qual és un subgrup discret isomorf a* $\mathbb{Z}^r$. *Per tant hi ha un isomorfisme de grups de matrius* $\mathbb{R}^r/\mathbb{Z}^r \cong T$.

2. Tors maximals en grups de matrius compactes

En aquest apartat estudiarem l'estructura dels grups de matrius en termes dels tors maximals. Durant l'apartat G serà un grup de matrius i $T \leq G$ un tor maximal.

Definició 2.1. *Sigui G un grup de matrius i* $T \leq G$ *un subgrup tancat el qual és un tor. Aleshores T és maximal en G si un tor* $T' \leq G$ *per al qual* $T \leq T'$ *és el mateix T.*

Per a $\theta \in [0, 2\pi)$, alguns exemples són

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \in SO_2(\mathbb{R}).$$

En general per $n \geq 1$ i $\theta_i \in [0, 2\pi)$ (i = 1,...,n)

$$R_{2n}(\theta_1, ..., \theta_n) = \begin{bmatrix} R(\theta_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R(\theta_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & R(\theta_n) \end{bmatrix} \in SO_{2n}(\mathbb{R}),$$

$$R_{2n+1}(\theta_1, ..., \theta_n) = \begin{bmatrix} R(\theta_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R(\theta_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & R(\theta_n) & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in SO_{2n+1}(\mathbb{R}),$$

PROPOSICIÓ 2.2. *Cada un dels següents són tors maximals als grups respectius.*

$$\begin{array}{rcl} \{R_{2n}(\theta_1, ..., \theta_n) : \forall k, \theta_k \in [0, 2\pi)\} & \leq & SO_{2n}(\mathbb{R}). \\ \{R_{2n+1}(\theta_1, ..., \theta_n) : \forall k, \theta_k \in [0, 2\pi)\} & \leq & SO_{2n+1}(\mathbb{R}). \\ \{diag(z_1, ..., z_n) : \forall k, |z_k| = 1\} & \leq & U_n(\mathbb{C}) \\ \{diag(z_1, ..., z_n) : \forall k, |z_k| = 1, z_1 \cdots z_n = 1\} & \leq & SU_n(\mathbb{C}) \\ \{diag(z_1, ..., z_n) : \forall k \ z_k \in \mathbb{C}, |z_k| = 1\} & \leq & Sp_n(\mathbb{H}) \end{array}$$

Ara recordarem el teorema d'estructura de les isometries de geometria afí i euclídia.

TEOREMA 2.3. *Sigui $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una isometria tal que g(x) = A(x) on $A \in O_n(\mathbb{R})$. Aleshores existeix $S \in O_n(\mathbb{R})$ i una base ortonormal B de la forma*

$$B = \begin{bmatrix} R(\theta_1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & R(\theta_k) & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -Id_s & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & Id_r \end{bmatrix}$$

tal que

$$B = S^{-1}AS$$

o el que és el mateix

$$A = SBS^{-1}.$$

TEOREMA 2.4. *Si $g \in G$, existeix un $x \in G$ tal que $g \in xTx^{-1}$, en altres paraules, g és conjugat d'un element de T. Equivalentment*

$$G = \bigcup_{x \in G} xTx^{-1}.$$

DEMOSTRACIÓ. Conseqüència directa del teorema anterior. □

TEOREMA 2.5. *En cada un dels següents grups de matrius, cada element és conjugat a un de la següent forma*

- $SO_{2n}(\mathbb{R}) : R'_{2n}(t_1, ..., t_n) \forall k\ \theta_k \in [0, 2\pi)$;
- $SO_{2n+1}(\mathbb{R}) : R'_{2n+1}(t_1, ..., t_n) \forall k\ \theta_k \in [0, 2\pi)$;
- $U_n(\mathbb{C}) : diag(z_1, ..., z_n) : \forall k\ z_k \in \mathbb{C}, |z_k| = 1$;
- $SU_n(\mathbb{C}) : diag(z_1, ..., z_n) : \forall k\ z_k \in \mathbb{C}, |z_k| = 1, z_1 + ... + z_n = 1$;
- $Sp_n(\mathbb{H}) : diag(z_1, ..., z_n) : \forall k\ z_k \in \mathbb{C}, |z_k| = 1$;

OBSERVACIÓ. Aquest resultat val per als grups de matrius.

PROPOSICIÓ 2.6. *Cada tor T té un generador.*

DEMOSTRACIÓ. Podem assumir que $T = \mathbb{R}^r/\mathbb{Z}^r$ i escriurem els elements de la fora $[x_1, ..., x_r] = (x_1, ..., x_r) + \mathbb{Z}^r$. Sigui $U_1, U_2, U_3, ...$ una base contable per a la topologia de T. Un cub d'aresta ϵ a T és un subconjunt de la forma

$$C([u_1, ..., u_r], \epsilon) = \{[x_1, ..., x_r] \in T : |x_k - u_k| < \epsilon/2 \ \ \forall k\},$$

per algun $[u_1, ..., u_r] \in T$. Com un cub és la imatge d'un cub a $\mathbb{R}^r$ amb l'aplicació quocient $\mathbb{R}^r \longrightarrow T$.

Sigui $C_0 \subseteq T$ un cub d'aresta $\epsilon > 0$. Suposem que tenim una seqüència decreixent de cubs C_k de costat ϵ_k,

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq \cdots \supseteq C_m,$$

on per a cada $0 \leq k \leq m$, existeix un enter N_k satisfent $N_k\epsilon_k > 1$ i $N_kC_k \subseteq U_k$. Ara triem un enter N_{m+1} suficientment gran per garantir que $N_{m+1}C_m = T$. Ara triem un cub petit $C_{m+1} \subseteq C_m$ de costat ϵ_{m+1} i així $N_{m+1}C_{m+1} \subseteq U_{m+1}$. Aleshores si $z = [z_1, ..., z_r] \in \bigcap_{k \geq 1} C_k$, tenim $N_kz \in C_k$ per a cada k, així les potències de z són denses a T, per tant z és un generador de T.

□

TEOREMA 2.7. *Si $T, T' \leq G$ són tors maximal, aleshores són conjugats a G, és a dir, existeix $y \in G$ tal que $T' = yTy^{-1}$*

DEMOSTRACIÓ. Com T' té un generador t, pel teorema anterior hi ha un $y \in G$ tal que $t \in yTy^1$, per tant $T' \leq yTy^{-1}$. Com T' és maximal i yTy^{-1} és un tor, aleshores tenim que $T' = yTy^{-1}$. □

3. Àlgebres de Lie dels tors maximals

TEOREMA 3.1. *Per a cada una de les següents àlgebres de Lie, cada element $x \in \mathfrak{g}$ és cojungat en G a un dels indicats*

- $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{R}) : R'_{2n}(t_1, ..., t_n) \forall k\ \theta_k \in [0, 2\pi)$;
- $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{R}) : R'_{2n+1}(t_1, ..., t_n) \forall k\ \theta_k \in [0, 2\pi)$;
- $\mathfrak{u}_n(\mathbb{C}) : diag(z_1, ..., z_n) : \forall k\ z_k \in \mathbb{R}$;
- $\mathfrak{su}_n(\mathbb{C}) : diag(z_1, ..., z_n) : \forall k\ z_k \in \mathbb{R}, z_1 + ... + z_n = 1$;
- $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{H}) : diag(z_1, ..., z_n) : \forall k\ z_k \in \mathbb{R}$;

Ara podem donar un resultat important el qual hem vist que és cert per alguns exemples.

TEOREMA 3.2. *Sigui G un grup de matrius compacte i connex. Aleshores la exponencial exp: $\mathfrak{g} \longrightarrow G$ és exhaustiva.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $T \leq G$ un tor maximal. Pel teorema 2.4, cada element $g \in G$ és conjugat a un element $xgx^{-1} \in T$. Per la proposició 1.3, $xgx^{-1} = exp(t)$ per algun $t \in \mathfrak{t}$, per tant

$$g = x^{-1} exp(t) x = exp(Ad_x(t)),$$

on $Ad_x(t) \in \mathfrak{g}$. Així $g \in exp\ \mathfrak{g}$. Concluïm que $exp\ \mathfrak{g} = G$.

□

Bibliografia

[1] Andrew Baker, An introduction to matrix groups and their applications, Springer, 2002
[2] M.L.Curtis, Matrix groups, Springer-Verlag, 1984
[3] John Stillwell, Naive Lie Theory, Springer, 2008
[4] F. Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Springer, 1971
[5] Howard D Freman, Introduction to compact Lie groups, World Scientific, 1991